



# دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: ..... کلاس: ..... موضوع امتحان: هندسه ۳ نام دبیر: محمد کرمی

## استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| ۰/۵ | درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.                                                                                                                                                                                                                               | ۱ |
|     | الف اگر $A$ یک ماتریس $3 \times 3$ باشد و $ A  = 2$ ، آنگاه $ 2A  = 16$ است. <b>ص</b>                                                                                                                                                                                          |   |
|     | ب مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت $r$ که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارجند، دایره $C'(O, 2r)$ است. <b>ص</b>                                                                                                                                         |   |
| ۱   | جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.                                                                                                                                                                                                                                          | ۲ |
|     | الف در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ m-1 & 4 \end{bmatrix}$ مقدار $m$ برابر ..... است.                                                                                                                                                                             |   |
|     | ب اگر $A$ یک ماتریس $3 \times 3$ باشد و $ A  = 5$ ، آنگاه $ \frac{1}{3}A $ برابر ..... است. <b>۵/۸</b>                                                                                                                                                                         |   |
|     | پ مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، <b>نیسان</b> آن زاویه است.                                                                                                                                                                                           |   |
|     | ت هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل <b>لاذخه متقاطع</b> است.                                                                                                                                                                                |   |
| ۱/۵ | ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i > j \\ i + j & i \leq j \end{cases}$ داده شده است، ماتریس $A^{-1}$ را به دست آورید.                                                                                                             | ۳ |
|     | $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$<br>$ A  = 8 - 9 = -1 \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \times \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ |   |
|     | اگر $A = \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = B$ باشند، حاصل $x^2 - 2y + z$ را به دست آورید.                                                                                                   | ۴ |
| ۱   | $2x - y = 3$<br>$2x + y = 5$<br><hr/> $4x = 8 \rightarrow x = 2, y = 1, z = -3$<br>$x^2 - 2y + z = 4 - 2 - 3 = -1$                                                                                                                                                             |   |

بازای چه مقدار  $m$  ماتریس  $A = \begin{bmatrix} m & 3 \\ 1 & m-2 \end{bmatrix}$  وارون پذیر نیست؟

$$|A|=0 \rightarrow m(m-2)-3=0 \rightarrow m^2-2m-3=0 \begin{cases} m=-1 \\ m=3 \end{cases}$$

اگر  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  و  $|A^3| = -8$  باشد، حاصل  $\frac{|A^{-1}|}{|3A|}$  را بیابید.

$$|A|^3 = -8 \rightarrow |A| = -2$$

$$\frac{|A^{-1}|}{|3A|} = \frac{\frac{1}{|A|}}{9|A|} = \frac{\frac{1}{-2}}{9 \times -2} = \frac{1}{36}$$

اگر  $3A = \begin{bmatrix} |A| & -5 \\ 1 & 4|A| \end{bmatrix}$  باشد، مقدار  $|A^{-1}|$  را محاسبه کنید.

$$|3A| = 4|A|^2 - (-5) \rightarrow 9|A| = 4|A|^2 + 5$$

$$4|A|^2 - 9|A| + 5 = 0 \begin{cases} |A|=1 \rightarrow |A^{-1}|=1 \\ |A|=\frac{5}{4} \rightarrow |A^{-1}|=\frac{4}{5} \end{cases}$$

دستگاه  $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}^B = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^C$$

$$|A| = 4 - 4 = 0 \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

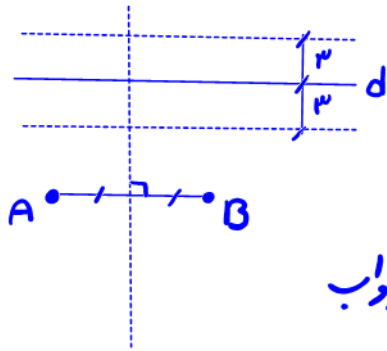
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times B = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}$$

مقدار  $m$  را طوری بیابید که دستگاه  $\begin{cases} mx + 9y = m+1 \\ 4x + my = -4 \end{cases}$  جواب نداشته باشد.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \quad \frac{m}{4} = \frac{9}{m} \neq \frac{m+1}{-4}$$

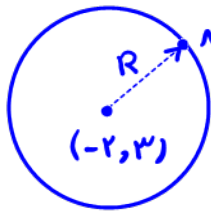
$$m^2 = 36 \rightarrow m = \pm 6 \begin{cases} m=6 \checkmark \\ m=-6 \checkmark \end{cases}$$

دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط  $d$  که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروضند، نقطه‌ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله بوده و از  $d$  به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.



اگر خط موازی و عمود منصف متقاطع باشند ← جواب  
اگر خط موازی و عمود منصف یکدیگر را قطع نکنند ← صفر جواب  
اگر یکی از خط موازی و عمود منصف منطبق باشند ← بی‌شمار جواب

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه  $O(-2, 3)$  مرکز آن و  $M(1, -1)$  یک نقطه از آن باشد.



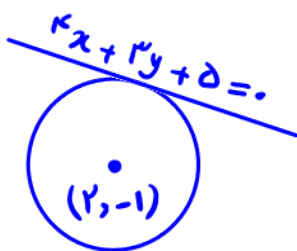
$$R = \sqrt{(-2-1)^2 + (3+1)^2} = 5$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط  $x+y=1$  و  $x-y=3$  شامل قطرهایی از آن بوده و خط  $4x+3y=-5$  بر آن مماس باشد.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$2x=4 \rightarrow x=2, y=-1 \quad O(2, -1)$$



$$R = \frac{|4-3+5|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = 2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0, 1)$  بوده و با دایره  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$  مماس داخل باشد.

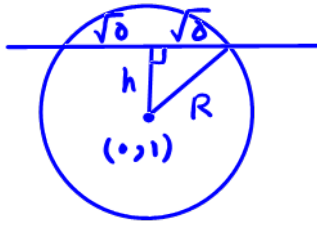
$$d = |R - R'| \quad O'(2, 3) \quad R' = 4$$

$$d = \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}$$

$$\sqrt{8} = |R - 4| \rightarrow R - 4 = \pm\sqrt{8} \rightarrow R = \pm\sqrt{8} + 4$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (\pm\sqrt{8} + 4)^2$$

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0, 1)$  بوده و روی خط  $3x + 4y + 6 = 0$  وتری به طول  $2\sqrt{5}$  جدا کند.



$$h = \frac{|0 + 4 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$R^2 = (\sqrt{5})^2 + (2)^2 \rightarrow R^2 = 9 \rightarrow R = 3$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 9$$

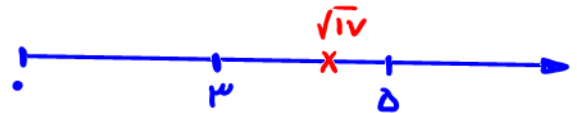
وضعیت دو دایره به معادلات  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$  و  $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$  را نسبت به هم تعیین کنید.

$$O(1, -2), R = 1$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 1 + 4 + 1 \rightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 17$$

$$O'(-2, -1) \quad R = \sqrt{17}$$

$$d = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{17}$$



دو دایره متقاطع هستند.

موفق باشید