



دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: کلیه کلاس: یازدهم ریاضی موضوع امتحان: حسابان ۱ نام دبیر: امیر ناصری

۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. (۱)

الف) شرط وارون پذیری یک تابع یک به یک بودن آن است. ✓

ب) شرط اینکه دو خط بر هم عمود باشند این است حاصل ضرب شیب آنها برابر ۱- باشد. ✓

ج) لگاریتم هر عدد مثبت عددی مثبت می باشد. ✗

د) تابع $f(x) = [x]$ در تمام اعداد صحیح دارای حد است. ✗

۲- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب تکمیل کنید. (۱)

$$S = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 4$$

$$P = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

الف) معادله درجه دوم $x^2 - 9x + 7 = 0$... دارای ریشه‌های $3 \pm \sqrt{2}$ می باشد.

ب) یک رادیان در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع است.

ج) مقدار لگاریتم عدد ۸ در مبنای ۴ برابر $\frac{3}{2}$ است.

د) بازه‌ی (۲ و ۶) یک همسایگی راست برای عدد ۲ می باشد.

۳- در دنباله حسابی با جمله‌ی اول ۵ و قدرنسبت ۳ چند جمله را باهم جمع کنیم تا حاصل از ۴۹۳ بیشتر باشد. (۱.۲۵)

$$S_n > 493$$

$$\frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} > 493$$

$$\frac{n(10 + (n-1)3)}{2} > 493$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow n(3n - 3 + 10) > 986 \\ n(3n + 7) > 986 \\ 3n^2 + 7n - 986 > 0 \\ \rightarrow n > 17 \end{array} \right.$$

پس از ۱۷ جمله.

۴- خط $4x + 3y = 5$ بر دایره به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. محیط دایره را به دست آورید. (۱)

$$r = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow r = d = \frac{|-4 + 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5}$$

$$p = 2\pi r \rightarrow p = 2\pi \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{4\pi}{5}$$

۵- اگر یکی از صفرهای تابع زیر برابر ۲ باشد. سایر صفرهای آنرا بیابید. (۱.۲۵)

$$p(x) = x^3 - x^2 - 4$$

$$p(x) = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline x^2 - 4 \\ -x^2 + 2x \\ \hline 2x - 4 \\ -2x + 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Delta < 0$$

صفر دیگری ندارد.

۶- اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ دو تابع باشند: (۱.۵)

$$D_f = [-2, +\infty)$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

الف) دامنه $f \circ g$ را به کمک تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(f+g)(2)$ را به دست آورید.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{1\} \mid \frac{2x+1}{x-1} \in [-2, +\infty) \right\}$$

$$\rightarrow (1, +\infty)$$

$$f(x) + g(x) = 2 + 2 = 4$$

$$\frac{2x+1}{x-1} \geq -2 \rightarrow \frac{2x+1}{x-1} + 2 \geq 0 \rightarrow \frac{2x+1+2x-2}{x-1} \geq 0 \rightarrow \frac{4x-1}{x-1} \geq 0$$

۷- تابع $f(x) = x^2 + 4x - 3$ را طوری محدود کنید تا به یک تابع وارون پذیر تبدیل شود و آنرا بیابید. (۱.۵)

$$x_5 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{یا} \quad (-\infty, 2] \quad \text{یا} \quad [-2, +\infty)$$

$$y = x^2 + 4x - 3 \xrightarrow{\left(\frac{b}{2}\right)^2} y = x^2 + 4x + 4 - 7 \rightarrow y = (x+2)^2 - 7$$

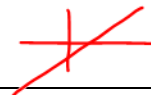
$$y + 7 = (x+2)^2 \rightarrow \sqrt{y+7} = x+2 \rightarrow \sqrt{y+7} - 2 = x \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y+7} - 2$$

۸- نمودار ~~را رسم کنید~~ که: (۱)

تابع های وارون پذیر

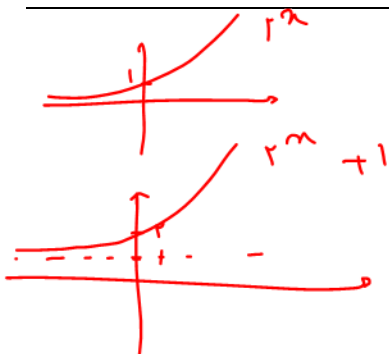


الف) نه تابع باشد نه یک به یک



ب) تابع وارون پذیر باشد

۹- نمودار $f(x) = 2^x + 1$ را رسم و سپس دامنه و برد آنرا تعیین کنید. (۱)



$$D = \mathbb{R}$$

$$R = (1, +\infty)$$

۱۰- معادله لگاریتمی زیر را حل کنید. (۱)

$$\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$$

$$\log_3(x-1)\left(\frac{x}{2}+1\right) = \log_3 9$$
$$\frac{x^2}{2} + x - \frac{x}{2} - 1 = 9$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$(x+5)(x-4) = 0$$

$$x = -5 \times$$

$$x = 4 \quad \checkmark$$

۱۱- با فرض اینکه $\log 2 = a, \log 3 = b$ مقدار $\log \sqrt{5}$ را به دست آورید. (۰.۷۵)

$$\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} (\log 10 - \log 2) = \frac{1}{2} (1 - a)$$

۱۲- مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید. (۱)

$$\sin(315) = \sin(360 - 45) = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

۱۳- ثابت کنید $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ (۱)

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

۱۴- اگر α زاویه‌ای در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و β زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد و $\cos\beta = \frac{-12}{13}$

در اینصورت حاصل $\cos(\alpha + \beta)$ را به دست آورید. (۱.۵)

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$
$$\cos\beta = \frac{-12}{13} \rightarrow \sin\beta = \frac{-5}{13}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$-\frac{4}{5} \times \frac{-12}{13} - \frac{3}{5} \times \left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{63}{65}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{-1 \times 2}{1} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۶- به ازای چه مقدار از m تابع مقابل در $x = -1$ پیوسته است؟ (۱.۲۵)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + m, & x \geq -1 \\ [x] + 3, & x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2x + m = -2 + m$$

$$-2 + m = 1 \rightarrow m = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [x] + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$f(-1) = -2 + m$$

موفق و سرفراز باشید. ۱۴۰۴/۳/۲۵

نام و نام خانوادگی مصحح:

نام و نام خانوادگی تجدید نظر کننده:

نمره ورقه به عدد:

محل امضا

محل امضا

نمره ورقه به حروف: