



دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: کلاس: موضوع امتحان: **هندسه ۳** نام دبیر: **محمد کرمی**

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۰/۵	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.	۱
	الف اگر A ماتریس قطری و B ماتریس هم‌مرتبه با A باشد، آنگاه حاصل ضرب آنها تعویض پذیر است. نادرست	
	ب مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد. درست	
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.	۲
	الف اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, $a_{ij} = 2i - j^2$, در این صورت درایه a_{23} برابر ۵- است.	
	ب اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & -k \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، k برابر ۱۰ است.	
	پ اگر A یک ماتریس 3×3 و $ A = 1$ ، در این صورت $ 2A $ برابر ۸- است.	
	ت هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع است.	
۱/۵	<p>الف اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & i < j \\ -1 & i = j \\ 2j - i & i > j \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - I^2$ را به دست آورید.</p> $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $A^2 - I^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$	۳
۱	<p>الف اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & m \\ n & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر m, n را طوری تعیین کنید که $A \times B$ یک ماتریس قطری شود.</p> $A \times B = \begin{bmatrix} 4 & m \\ n & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3m & -8+2m \\ n-3 & -2n-2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} -8+2m &= 0 \rightarrow m=4 \\ n-3 &= 0 \rightarrow n=3 \end{aligned}$	۴

برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ داریم $A^Y = mA$ مقدار m را به دست آورید.

۵

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I$$

$$A^Y = (A^2)^m \times A = (-2I)^m \times A = -2^m IA = -2^m A \rightarrow m = -\infty$$

ماتریس $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(I - B)$ را بر حسب ستون سوم محاسبه کنید.

۶

$$I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|I - B| = 1(-1 - 2) + 1(-1 - 2) - 2(-1 + 3) = -3 - 7 - 4 = -14$$

اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 1 \\ 1 & |A| & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر $|A|$ را به روش ساروس به دست آورید.

۷

$$A = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 1 & |A| & 0 \\ 1 & |A| & 1 & 1 & |A| \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (|A|^2 + 0 + 2) - (0 + 2|A| + 0) \rightarrow |A|^2 - 2|A| + 2 = 0 \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = 2 \end{cases}$$

دستگاه معادلات زیر را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} 4x - y = 9 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۸

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 28 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x \\ \rightarrow y \end{matrix}$$

به ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - my = 3 \\ mx - 8y = m + 2 \end{cases}$ جواب ندارد؟

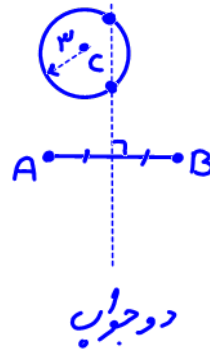
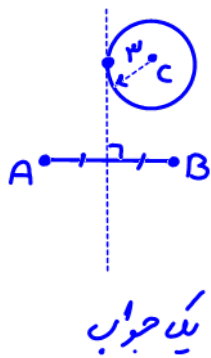
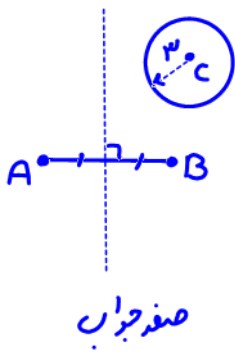
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{2}{m} = \frac{-m}{-8} \neq \frac{3}{m+2}$$

$$m^2 = 14 \begin{cases} m = \sqrt{14} \quad \times \\ m = -\sqrt{14} \quad \checkmark \end{cases}$$

۱/۵

۹

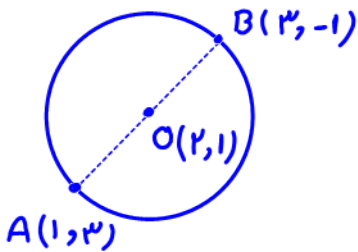
نقاط A و B و C در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).



۱/۵

۱۰

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(1, 3)$ و $B(3, -1)$ دو سر قطر آن باشند.



$$O\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \rightarrow O(2, 1)$$

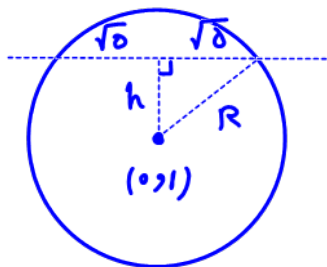
$$r = OA = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

۱/۵

۱۱

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ بوده و روی خط $3x + 4y + 6 = 0$ وترى به طول $2\sqrt{5}$ جدا کند.



$$h = \frac{|0 + 4 + 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$R^2 = h^2 + (\sqrt{5})^2 \rightarrow R^2 = 9$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 9$$

۱/۵

۱۲

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, -2)$ بوده بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ مماس خارج باشد.

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$O'(-1, 2) \quad R'=3$$

$$d = OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2} = 5$$

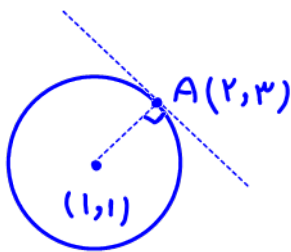
$$d = R + R' \rightarrow 5 = R + 3 \rightarrow R = 2$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

۱/۵

۱۳

در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.



$$O(1, 1)$$

$$m = \frac{3-1}{2-1} = 2 \xrightarrow{\text{قرینه معکوس}} m = -\frac{1}{2}$$

$$y-3 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

۱/۵

۱۴

وضعیت دو دایره $C: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ و $C': (x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$ را نسبت به هم مشخص کنید.

$$C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \rightarrow O(1, -1) \quad R=1$$

$$C': O'(-3, 2) \quad R'=2 \quad d = \sqrt{(1+3)^2 + (-1-2)^2} = 5$$

$$d > R + R' \rightarrow \text{متقاطع هستند}$$

۱/۵

۱۵