



دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: **پاسخنامه** کلاس: **یازدهم ریاضی** موضوع امتحان: **حسابان ۱** نام دبیر: **امیر ناصری**

۱- درستی یا نادرستی روابط زیر را تعیین کنید. (۱)

الف) دو خط بر هم عمودند هرگاه شیب آنها قرینه هم باشد **غ**

ب) شرط وارون پذیری یک تابع یک به یک بودن آن است. **ص**

ج) $[-2.01] = -3$ **ص**

د) مجموع ریشه‌های معادله $3x^2 + 4x - 1 = 0$ برابر $\frac{4}{-3}$ است. **ص**

۲- جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. (۲)

الف) معادله درجه دوم **$x^2 - 4x + 4 = 0$** ... دارای ریشه‌های $3 \pm \sqrt{3}$ می‌باشد.

ب) فاصله دو خط موازی $l_1 = ax + by + c_1 = 0$, $l_2 = ax + by + c_2 = 0$ از رابطه **$d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$** به دست می‌آید.

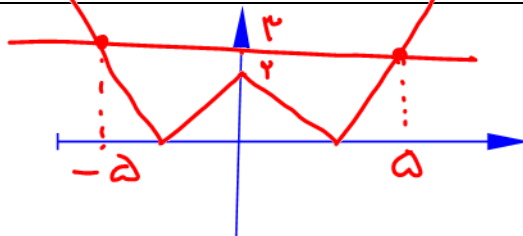
ج) تابع $f(x) = x - 2$, $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ باهم برابر **نیستند** ... (هستند - نیستند) زیرا **$D_f \neq D_g$**

۳- یک مربع به طول ضلع ۱ متر در اختیار داریم، ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده رنگ می‌کنیم و این کار بدین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. بعد از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ می‌شود؟ (۱.۲۵)

$$S_n \geq \frac{99}{100} \rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \geq \frac{99}{100}$$

$$\frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{4})^n)}{1-\frac{1}{4}} \geq \frac{99}{100} \rightarrow 1 - (\frac{1}{4})^n \geq \frac{99}{100} \rightarrow (\frac{1}{4})^n \leq \frac{1}{100}$$

$n \geq 7$ مرحله ۷ برسد



$$||x - 2| = 3$$

۴- معادله زیر را به روش هندسی حل کنید. (۱.۲۵)

۵- معادلات زیر را به روش جبری حل کنید. (۲.۵)

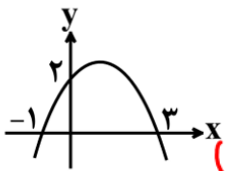
الف) $\sqrt{x+1} + 2 = x - 3$

$\sqrt{x+1} = x - 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+1 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$
 $\rightarrow x_1 = 3, x_2 = 8$ ق.ع

ب) $(x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1) - 3 = 0$

$(x^2 + 1) = t$
 $t^2 + 2t - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 & x^2 + 1 = 1 \rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \checkmark \text{ ق.ع} \\ t = -3 & x^2 + 1 = -3 \rightarrow x^2 = -4 \times \text{ق.ع} \end{cases}$

۶- معادله سهمی زیر را بنویسید. (۱.۲۵)



$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$

$y = a(x + 1)(x - 3)$

$y = -\frac{2}{3}(x + 1)(x - 3)$

$(0, 2) \rightarrow 2 = a(1)(-3)$

$2 = -3a$

$-\frac{2}{3} = a$

$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$

۷- خط به معادله $l = 3x + 4y - 1 = 0$ یکی از اضلاع مربعی است و نقطه‌ی $(1, 2)$ یکی از رئوس این مربع می‌باشد.

مساحت مربع را به دست آورید. (۱.۲۵)

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2 \leftarrow \text{طول مربع}$

$S = 2 \times 2 = 4 \checkmark$

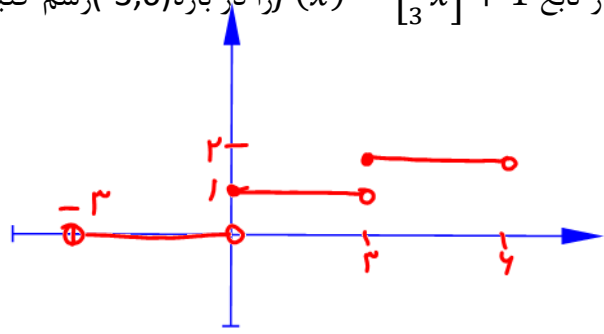
۸- نامساوی مثلثی (قدرمطلق) را بیان و اثبات کنید. (۱)

$|a| + |b| \geq |a + b|$

$\begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{cases} \xrightarrow{+} -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$
 $\rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$

۹- نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x\right] + 1$ را در بازه $(-3, 6)$ رسم کنید. (۱)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -3 < x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 3 \\ 2 & 3 \leq x < 6 \end{cases}$$



۱۰- با فرض وارون پذیر بودن $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$ وارون آنرا بیابید. (۱.۲۵)

$$y = \frac{x+2}{2x-3}$$

$$x(2y-1) = -2y+2$$

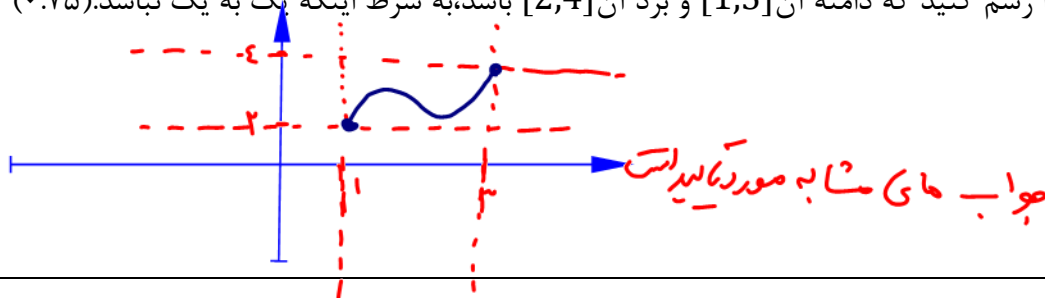
$$2xy + 2y = x + 2$$

$$x = \frac{-2y+2}{2y-1}$$

$$2xy - x = -2y + 2$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+2}{2x-1}$$

۱۱- نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[1, 3]$ و برد آن $[2, 4]$ باشد، به شرط اینکه یک به یک نباشد. (۰.۷۵)



۱۲- با فرض اینکه $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 0), (3, -1), (-1, 1)\}$ و $g = \{(2, 2), (-2, 0), (1, -1), (4, 3)\}$

در این صورت مطلوب است محاسبه: (۱.۵)

$$f \circ g = \left\{ \left(2, \frac{2}{3} \right), \left(1, \frac{-1}{2} \right) \right\}$$

$$f \circ g \circ f = \left\{ (2, 3), (1, 1), (4, -1) \right\}$$

۱۳- ثابت کنید دو تابع $f(x) = 3x - 6$ و $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$ وارون یکدیگر هستند. (۱)

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$$

$$f(g(x)) = 3g(x) - 6 = 3\left(\frac{1}{3}x + 2\right) - 6 = x + 6 - 6 = x$$

$$g(f(x)) = \frac{1}{3}f(x) + 2 = \frac{1}{3}(3x - 6) + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$D_g = [-1, +\infty) \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

۱۴- اگر $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ در اینصورت مطلوب است محاسبه: (۱.۵)

$$\text{الف) } D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \rightarrow \{x \in [-1, +\infty) \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} - \{2\}\} \\ = [-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$\text{ب) } (g \circ f)_{(3)} = g(f(3)) = g(1) = \sqrt{2}$$

۱۵- بازه‌ای تعیین کنید که تابع $f(x) = x^2 - 6x + 4$ در آن وارون پذیر باشد. (۰.۵)

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \quad [3, +\infty) \quad \text{یا} \quad (-\infty, 3]$$

یا زیر مجموعه‌ای از این بازه ها -

۱۶- معادله زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید. (۱)

$$[x + 1] + [x + 3] + [x - 2] = 8$$

$$[x] + 1 + [x] + 3 + [x] - 2 = 8$$

$$3[x] + 2 = 8$$

$$3[x] = 6 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3 \\ x \in [2, 3) \quad \checkmark$$

موفق باشید و پیروز

نام و نام خانوادگی مصمم: نام و نام خانوادگی تجدید نظر کننده: شماره ورقه به عدد:

محل امضا محل امضا شماره ورقه به حرف: