



دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: کلاس: موضوع امتحان: ریاضیات گسسته نام دبیر: محمد کرمی

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۰/۵	۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
	الف	اگر $a b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $ a > b $. نادرست
	ب	برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \equiv r \pmod{m}$. درست
۰/۵	۲	جاهای خالی را با اعداد یا عبارات مناسب تکمیل کنید.
	الف	مرتبه گراف، نشان‌دهنده تعداد ... رأس ... گراف می‌باشد.
	ب	تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی ... زوج ... است.
۰/۵	۳	در هر مورد کلمه مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.
	الف	اگر $a b$ آنگاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با (a, a) است.
	ب	گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد.
		گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.
		مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. نادرست
۱/۵	۴	اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.
		$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n+1) = 4(2q) = 8q \quad q \in \mathbb{Z}$ عدد زوج
		به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.
۱/۵	۵	$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0$ همواره درست است
		$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد 4 و 5 به ترتیب 2 و 3 باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر 20 بیابید.

$$a = 4q + 2 \quad \times 5 \rightarrow \Delta a = 20q + 10$$

$$a = 5q' + 3 \quad \times 4 \rightarrow \text{فا} = 20q' + 12$$

$$\text{تفریق} \quad a = 20q - 20q' - 2 \rightarrow a = 20(q - q' - 1) - 2 + 20$$

$$r = 18$$

اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد به طوری که $7 | 2k + 1$ ، ثابت کنید:

$$49 | 4k^2 - 10k - 6$$

$$7 | 2k + 1 \quad \xrightarrow{(\quad)^2} \quad 49 | 4k^2 + 4k + 1$$

$$\xrightarrow{\times 7} \quad 49 | 14k + 7$$

$$\text{(تفریق)} \quad 49 | 4k^2 - 10k - 6$$

اگر در یک سال ۱۲ مهر دوشنبه باشد ۱۶ تیر همان سال چه روزی است؟ **جمع‌سینه**

$$15 + 31 + 31 + 12 = 79$$

$$\begin{array}{r} 79 \quad 17 \\ 7 \overline{) 79} \\ \underline{70} \\ 90 \\ \underline{84} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{21} \\ 90 \\ \underline{70} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{49} \\ 11 \end{array}$$

$$79 \equiv 5$$

د	ی	س	ج	ب	ج	س
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

باقی مانده تقسیم عدد $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200!$ را بر 15 به دست آورید. (! نماد فاکتوریل است)

$$\begin{array}{r} 1! \equiv 1 \\ 2! \equiv 2 \\ 3! \equiv 6 \\ 4! \equiv 24 \\ 5! \equiv 120 \\ \vdots \\ 200! \equiv 0 \end{array}$$

$$\text{جمع} \rightarrow 1! + 2! + 3! + \dots + 200! \equiv 18 - 15 \rightarrow r = 3$$

باقی مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{25} \times 9 + 11$ را بر 7 بیابید.

$$1000 \equiv 6 \pmod{7} \xrightarrow{(\quad)^{25}} (1000)^{25} \equiv 6^{25} \equiv -1 \xrightarrow{\times 9} (1000)^{25} \times 9 \equiv -9$$

$$(1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \pmod{7} \rightarrow r = 2$$

اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.

$$4a - 7 \equiv 3a - 5 \pmod{10} \rightarrow a \equiv 2 \pmod{10} \rightarrow 9a \equiv 18$$

$$\rightarrow 9a + 6 \equiv 18 + 6 \equiv 24 \pmod{10} \rightarrow r = 4 = \text{رقم یکان}$$

معادله هم‌نهشتی $8x \equiv 12 \pmod{12}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

$$8x \equiv 12 \pmod{12} \xrightarrow{\div 4} 2x \equiv 3 \pmod{3} \rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow x = 3k + 1$$

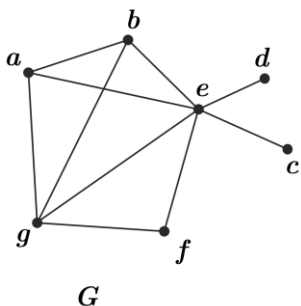
به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

$$3x + 5y = 23 \rightarrow 3x \equiv 23 - 5 \pmod{5} \xrightarrow{\div 3} x \equiv 4 \pmod{5} \rightarrow x = 5k + 4$$

$$3(5k + 4) + 5y = 23 \rightarrow 5y = -15k + 5 \rightarrow y = -3k + 1$$

k	0	1	-1
x	4	9	1
y	1	-2	4

(۲، ۷) طریق امکان پذیر است



$$p = 7 \quad q = 10$$

cebagf

با توجه به گراف G مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.

مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.

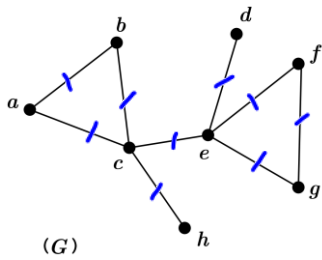
مسیری به طول ۵ از رأس c به رأس f بنویسید.

به گراف ۸ رأسی ۳-منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه حل)

$$q_{\text{موجود}} = \frac{nK}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$$

$$q_{\text{max}} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$\text{لازم } q = 28 - 12 = 16$$



گراف G روبه‌رو را در نظر بگیرید:

مقدار $q(\bar{G})$ را به دست آورید.

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$9 + q(\bar{G}) = \frac{8 \times 7}{2} \rightarrow q(\bar{G}) = 19$$

مجموع درجات رئوس گراف \bar{G} را مشخص کنید.

$$\sum \deg_{\bar{G}} = 2 \times q(\bar{G}) = 38$$

۱۶

گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه گراف و Δ را مشخص کنید.

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36 \rightarrow n(n-1) = 72 \rightarrow n = 9 = \text{مرتبه}$$

$$\Delta = n - 1 = 8$$

۱۷

موفق باشید