



## دبیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: ..... کلاس: دوازدهم ریاضی ..... موضوع امتحان: حسابان ۲ نام دبیر: تقی زاده

۱) درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (بارم: ۰/۷۵)

هر کدام ۲۵

- الف) تابعی وجود ندارد که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی باشد. ص  غ
- ب) بازه‌ای وجود ندارد که تابع  $f(x) = \tan x$  در آن اکیدا نزولی باشد. ص  غ
- پ) در تابع ثابت، مجانب افقی وجود ندارد. ص  غ

۲) در جاهای خالی اعداد یا عبارات مناسب بنویسید. (بارم: ۰/۷۵)

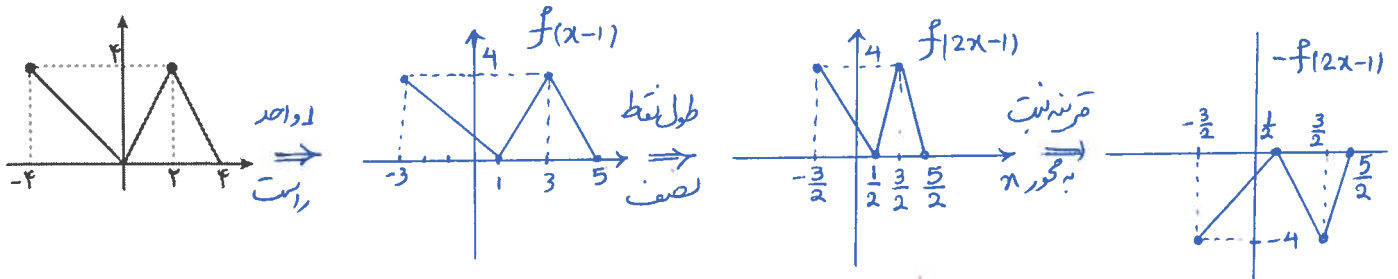
هر کدام ۲۵

الف) وارون تابع  $f(x) = x^3$  عبارت است از تابع  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  .....

ب) برد تابع  $f(x) = \tan x$  برابر است با  $\mathbb{R}$  .....

پ) تابع  $f(x) = 2x(1-3x^2)^4$  چندجمله‌ای از درجه ۹... است.

۳) با توجه به نمودار تابع  $f(x)$  که در زیر نشان داده شده است، مطلوب است رسم نمودار  $y = -f(2x-1)$ . (بارم: ۱/۵)

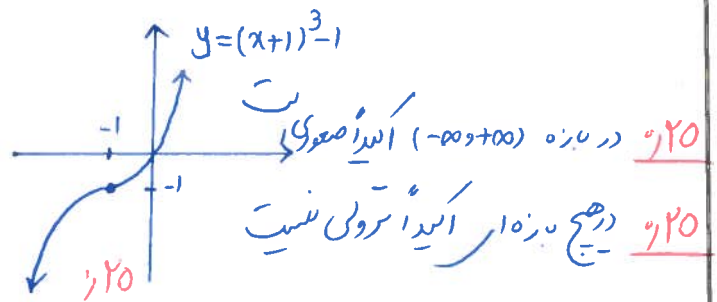
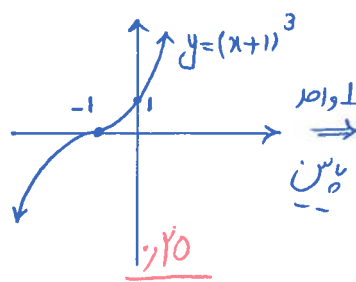
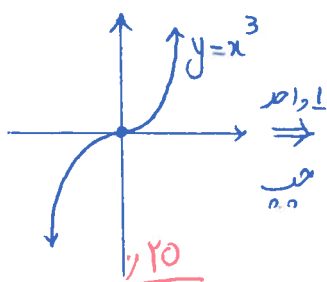


هر نمودار ۲۵

۴) نمودار تابع  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$  را با انتقال نمودار  $y = x^3$  رسم کنید و مشخص نمایید در چه بازه‌ای صعودی و

در چه بازه‌ای نزولی است؟ (بارم: ۱/۵)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$$



(۵) الف) فرض کنید تابع  $f$  در یک بازه اکیداً نزولی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این بازه باشند. اگر  $f(a) \leq f(b)$  نشان دهید که  $a \geq b$ . (بارم: ۰/۷۵)

فرض کنید  $a < b$   $\Rightarrow$   $f(a) > f(b)$  ۲۰  
 به تناقض با فرض رسیده ایم پس فرض صحیح،  $a \geq b$  است ۲۰

ب) نامعادله  $(\frac{1}{2})^{3x-2} > 64$  را حل نمایید. (بارم: ۰/۷۵)  
 $2^{-3x+2} > 2^6 \Rightarrow -3x+2 > 6 \Rightarrow -3x > 4 \Rightarrow x < -\frac{4}{3}$   
۲۰ ۲۰ ۲۰

(۶) الف) مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که چند جمله ای  $p(x) = x^3 + ax^2 - bx + 1$  بر  $x-1$  بخش پذیر بوده و باقیمانده

تقسیم آن بر  $x+2$  برابر ۳ باشد. (بارم: ۱/۵)  
 $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=0 \Rightarrow 1+a-b+1=0 \Rightarrow a-b=-2$  ۲۰  
 $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2)=3 \Rightarrow -8+4a+2b+1=3 \Rightarrow 4a+2b=10 \Rightarrow 2a+b=5$  ۲۰  
 حل دستگاه  $a=1$  ۲۰  
 $b=3$  ۲۰

ب) چند جمله ای  $x^5 + 32$  را با عامل  $x+2$  تجزیه نمایید. (بارم: ۰/۵)

$$(x^5 + 2^5) = (x+2)(x^4 - x^3(2) + x^2(2^2) - x(2^3) + 2^4)$$

۲۰ ۲۰

(۷) بیشترین مقدار، کمترین مقدار و دوره تناوب تابع  $f(x) = 1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{3}$  را به دست آورید. (بارم: ۱/۵)

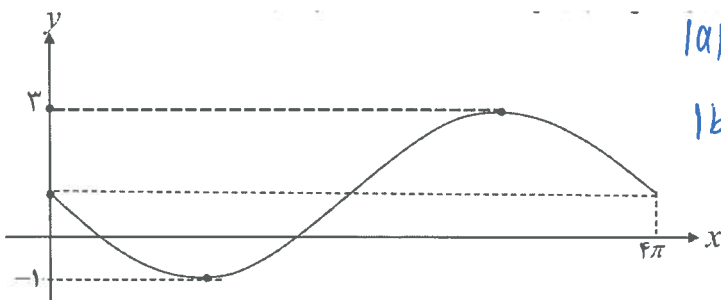
$$f(x) = -\sqrt{2} \cos \frac{x}{3} + 1$$

$$\text{Max} = |a| + c = \sqrt{2} + 1$$
 ۲۵  

$$\text{min} = -|a| + c = -\sqrt{2} + 1$$
 ۲۵  

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$
 ۲۵

(۸) ضابطه تابع مثلثاتی مقابل را به دست آورید. (بارم: ۲)



$$|a| = \frac{\text{Max} - \text{min}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow a = -2$$
 ۲۵  

$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$
 ۲۵  

$$c = \frac{\text{Max} + \text{min}}{2} = 1$$
 ۲۵  

$$y = -2 \sin \frac{1}{2}x + 1$$
 ۲۵

۹) معادله مثلثاتی  $\cos(2x) - \cos(x) = 0$  را حل کرده و جوابها را در بازه  $(0, \pi)$  به دست آورید. (بارم: ۲)

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow \text{جواب عمومی} \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi & \text{۲۰\%} \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} & \text{۲۰\%} \end{cases}$$

$$k \quad | \quad \begin{array}{c} 0 \\ \hline 2\pi \end{array} \quad \text{۲۰\%}$$

$$k \quad | \quad \begin{array}{c} 0 \\ \hline \frac{2\pi}{3} \\ \hline \frac{4\pi}{3} \end{array} \quad \text{۲۰\%}$$

۱۰) تانژانت زاویه ۱۵ درجه را به دست آورید. (بارم: ۱)

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + (\tan 45^\circ \tan 30^\circ)} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \quad \text{۲۰\%}$$

۱۱) مجانب قائم و افقی تابع  $f(x) = \frac{1-4x}{2x+5}$  را بیابید. (بارم: ۱/۲۵)

$$2x+5=0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \quad \text{۲۰\%}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{2}} \frac{1-4x}{2x+5} = \infty \quad \text{۲۰\%}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-4x}{2x+5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x}{2x} = -2 \Rightarrow y = -2 \quad \text{۲۰\%}$$

۱۲) حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید. (بارم: ۲)

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3x^2}{4x^3-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{4x} = \frac{-3}{+\infty} = 0 \quad \text{۲۰\%}$

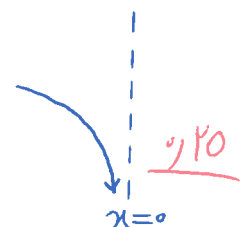
ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad \text{۲۰\%}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{4 - 0}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{۲۰\%}$

۱۳) نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$  را در مجاورت مجانب قائم آن رسم کنید. (بارم: ۱/۲۵)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0} = \infty & x > 0 \\ \frac{1}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x} \quad x < 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{۲۰\%}$$



۱۴)  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که داشته باشیم:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-3x}{x^2+ax+b} = +\infty$  (بارم: ۱)

فرض  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 + ax + b$

$a = 2$

$b = 1$

موفق باشید - تقی زاده

نام و نام خانوادگی مصمم:

نام و نام خانوادگی تمدید نظر کننده:

نمره ورقه به عدد: .....

محل امضا

محل امضا

نمره ورقه به حرف: .....