



دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: کلاس: **دوازدهم تجربی** موضوع امتحان: **ریاضی ۳** نام دبیر: **تقی زاده**

(۱) درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (بارم: ۰/۷۵)

- (الف) تابعی وجود ندارد که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی باشد. ص غ
- (ب) بازه‌ای وجود ندارد که تابع $f(x) = \tan x$ در آن اکیدا نزولی باشد. غ ص
- (پ) بازه $(2,5)$ همسایگی چپ عدد ۲ است. ص غ

هر کدام ۲۵

(۲) در جاهای خالی اعداد یا عبارات مناسب بنویسید. (بارم: ۱/۲۵)

(الف) وارون تابع $f(x) = x^3$ عبارت است از تابع $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

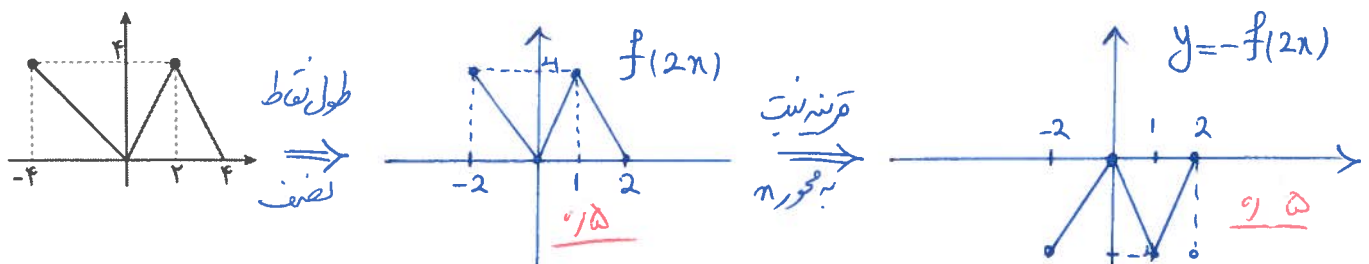
(ب) برد تابع $f(x) = \tan x$ برابر است با \mathbb{R}

(پ) تابع $f(x) = 2x(1-3x^2)^4$ تابعی چندجمله‌ای از درجه ۹ است.

(ت) تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$ را می‌توان به صورت ترکیب دو تابع $y_1 = \sqrt[3]{x}$ و $y_2 = x^2 - 3x + 1$ نوشت.

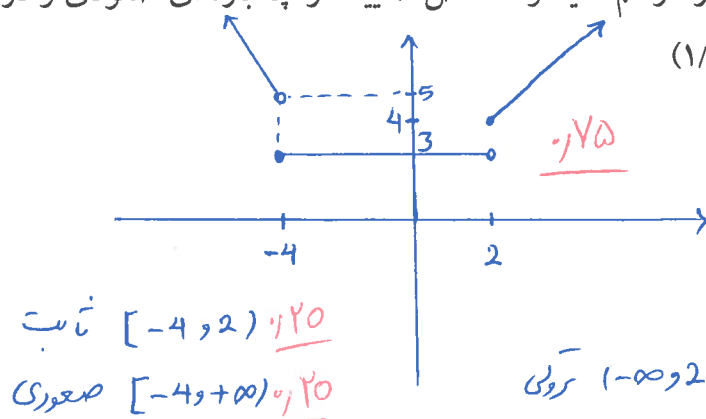
هر قسمت ۲۵

(۳) با توجه به نمودار تابع $f(x)$ که در زیر نشان داده شده است، مطلوب است رسم نمودار $y = -f(2x)$. (بارم: ۱)



(۴) نمودار تابع زیر را رسم کنید و مشخص نمایید در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی و در چه بازه‌ای ثابت است؟ (بارم: ۱/۵)

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$



۵) الف) فرض کنید $fog(x) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، مطلوب است یافتن ضابطه $g(x)$. (بارم: ۰/۷۵)

$$f(g(x)) = 3g(x) - 4 \quad \text{۰/۲۰}$$

$$3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \quad \text{۰/۲۰}$$

$$3g(x) = 3x^2 - 6x + 18 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6 \quad \text{۰/۲۰}$$

ب) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشند، مطلوب است یافتن دامنه تابع $fog(x)$. (بارم: ۰/۷۵)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \begin{matrix} 2x^2 - 1 \geq 1 \\ 2x^2 \geq 2 \\ x^2 \geq 1 \end{matrix}\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \quad \text{۰/۲۰}$$

۶) با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ تابعی یک به یک بسازید و سپس ضابطه وارون تابع را به دست

آورید. (بارم: ۱/۵) $D_f = [2, +\infty)$ $R_f = [1, +\infty)$ $f(x) = (x-2)^2 + 1$ ۰/۲۰

$$y - 1 = (x - 2)^2 \Rightarrow \sqrt{y - 1} = |x - 2| \Rightarrow \sqrt{y - 1} = x - 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y - 1} + 2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x - 2} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 2 \quad \text{۰/۲۰}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [1, +\infty) \quad \text{۰/۲۰}$$

$$R_{f^{-1}} = D_f = [2, +\infty) \quad \text{۰/۲۰}$$

۷) بیشترین مقدار، کمترین مقدار و دوره تناوب تابع $f(x) = 1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{3}$ را به دست آورید. (بارم: ۱/۵)

$$f(x) = -\sqrt{2} \cos \frac{x}{3} + 1$$

$$\text{Max} = |a| + c = \sqrt{2} + 1 \quad \text{۰/۵}$$

$$\text{min} = -|a| + c = -\sqrt{2} + 1 \quad \text{۰/۵}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi \quad \text{۰/۵}$$

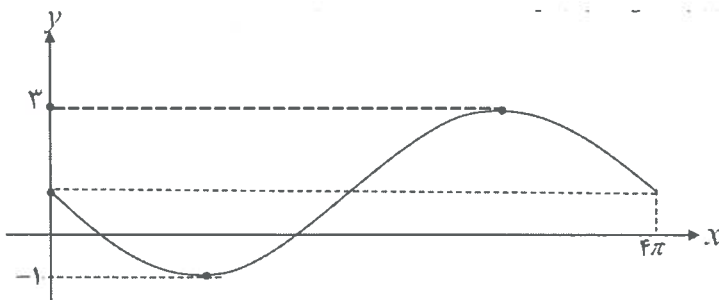
۸) ضابطه تابع مثلثاتی مقابل را به دست آورید. (بارم: ۲)

$$|a| = \frac{\text{Max} - \text{min}}{2} = 2 \Rightarrow a = -2 \quad \text{۰/۵}$$

$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \text{۰/۵}$$

$$c = \frac{\text{Max} + \text{min}}{2} = 1 \quad \text{۰/۵}$$

$$y = -2 \sin \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{۰/۵}$$



۹) معادله مثلثاتی $\cos(2x) - \cos(x) = 0$ را حل کرده و جوابها را در بازه $(0, \pi)$ به دست آورید. (بارم: ۱)

$$\cos 2x = \cos x \quad \Rightarrow \quad \text{جواب عمومی} \quad \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

k	0	1
$x = 2k\pi$	0 غ	2π غ

k	0	1	2
$x = \frac{2k\pi}{3}$	0 غ	$\frac{2\pi}{3}$ ✓	$\frac{4\pi}{3}$ غ

۱۰) حاصل عبارت $\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \cos(2x)$ را به ازای $x = 7.5^\circ$ به دست آورید. (بارم: ۰/۷۵)

$$\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4} \sin(30) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

۱۱) باقی مانده تقسیم چند جمله ای $2x^2 - 5x + 1$ را بر $x - 2$ بدون انجام عمل تقسیم بیابید. (بارم: ۰/۵)

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$p(2) = 2(4) - 10 + 1 = -1$$

۱۲) حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید. (بارم: ۳)

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3x^2}{4x^3 - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{4x} = \frac{-3}{+\infty} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^4} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{4 - \frac{3}{+\infty}}{2 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{4 - 0}{2 + 0} = 2$

ت) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x^2 + x + 1)}{(x-5)(x+5)} = \frac{25 + 5 + 1}{10} = \frac{31}{10}$

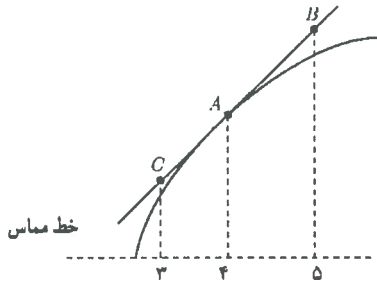
۱۳) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-3x}{x^2+ax+b} = +\infty$ را چنان بیابید که داشته باشیم: (بارم: ۰/۷۵)

$$\text{فرض} \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 + ax + b$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$

۱۴) برای تابع f در شکل روبرو داریم: $f(4)=25$ و $f'(4)=1.5$. مختصات نقاط A ، B و C را بیابید. (بارم: ۱/۵)



$$A \mid \begin{array}{l} 4 \\ 25 \end{array}$$

$$m = 1.5$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 25 = 1.5(x - 4)$$

$$y = 1.5x + 19$$

$$B \mid \begin{array}{l} 5 \\ 26.5 \end{array}$$

↑

$$\begin{cases} y_B = 1.5(5) + 19 = 26.5 \\ y_C = 1.5(3) + 19 = 23.5 \end{cases}$$

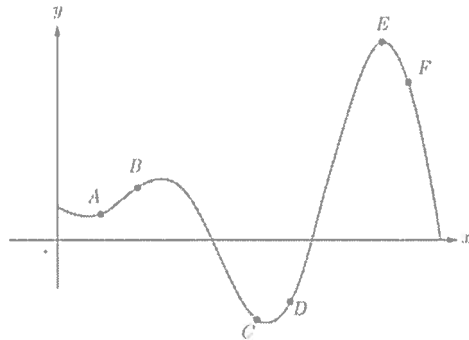
$$C \mid \begin{array}{l} 3 \\ 23.5 \end{array}$$

۱۵) نقاط داده شده در منحنی زیر را به شیب‌های داده شده در جدول نظیر کنید. (بارم: ۱/۵)

شیب نقطه

-۲	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D

موفق باشید



موفق باشید - تقی زاده

نام و نام خانوادگی مصمم:

نام و نام خانوادگی تجدید نظر کننده:

نمره ورقه به عدد:

محل امضا

محل امضا

نمره ورقه به حرف: