



## دبیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: **سوال و راهنمای تصحیح** کلاس: **یازدهم ریاضی** موضوع امتحان: **حسابان ۱** نام دبیر: **استاد ناصری**

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. (۱)

الف) اگر دو خط برهم عمود باشند آنگاه شیب آنها قرینه یکدیگر است. **خ**

ب) شرط وارون پذیری یک تابع یک به یک بودن آن است. **س**

ج) ۴۵ درجه برابر ۴ رادیان می باشد. **خ**

د) لگاریتم یک در مبنا عدد دو برابر یک است. **خ**

۲- مجموع ۵۰ جمله اول دنباله حسابی با جمله اول ۲ و قدرنسبت ۳ را تعیین کنید. (۱.۲۵)

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50 \cdot (2 + (49)3)}{2} = 3775$$

۳- معادله زیر را حل کنید. (۱)

$$\sqrt{2x+3} + x = 6$$

$$\sqrt{2x+3} = 6-x \xrightarrow{\text{مربع}} 2x+3 = 36 - 12x + x^2 \rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0$$

$$x(x-11)(x-3) = 0$$

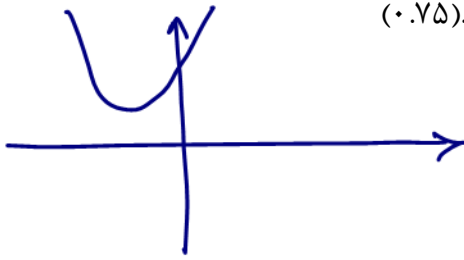
$\hookrightarrow x=11$        $\hookrightarrow x=3$  ✓

۴- خط  $4x+3y=5$  بر دایره به مرکز  $O(-1,2)$  مماس است. مساحت دایره را به دست آورید. (۱)

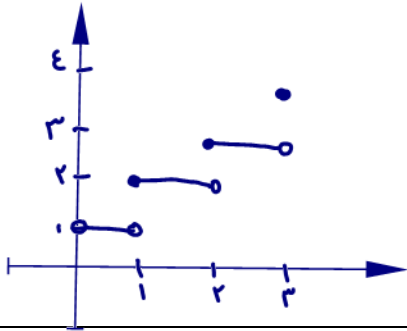
$$r = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow d = \frac{|-4 + 6 - 5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5}$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \frac{9}{25} \pi$$

۵- نمودار یک سهمی را رسم کنید که علامت  $a, b, c$  همگی مثبت باشد. (۰.۷۵)



۶- نمودار تابع  $f(x) = [x] + 1$  را در بازه  $(0, 3]$  رسم کنید. (۱.۲۵)



$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 3 & 2 \leq x < 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases}$$

۷- ابتدا نشان دهید تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  وارون پذیر نیست سپس با محدود کردن دامنه تابع وارون پذیر بسازید و ضابطه وارون آنرا بنویسید. (۲)

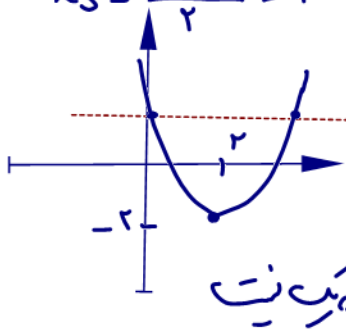
$$x_S = \frac{\varepsilon}{2} = 2 \quad y_S = \varepsilon - 4 + 2 = -2$$

تابع را در بازه  $(2, +\infty)$  در نظر بگیرید که وارون پذیر باشد.

$$y = x^2 - 4x + 2 \rightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 2 = (x-2)^2 - 2$$

$$\rightarrow y = (x-2)^2 - 2 \rightarrow \sqrt{y+2} = x-2$$

$$\rightarrow x = \sqrt{y+2} + 2 \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y+2} + 2$$



تعیین کنید

۸- توابع  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ،  $g(x) = \sqrt{4-x^2}$  مفروضه‌اند، دامنه تابع  $f \circ g$  را به کمک تعریف به دست آورید. (۱)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = [-2, 2]$$

$$= \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4-x^2} \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

$$D_{f \circ g} = (-2, 2)$$

۹- نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند را حساب کنید. (۱)

$$m(t) = m_0 \times 2^{-\frac{t}{h}} \rightarrow m(t) = 128 \times 2^{-\frac{300}{30}} = 128 \times 2^{-10} = \frac{1}{8} \text{ mg}$$

۱۰- با فرض اینکه  $\log 2 = a, \log 3 = b$  در این صورت  $\log \sqrt{30}$  را بر حسب  $a, b$  به دست آورید. (۱)

$$\log \sqrt{30} = \log 30^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 30 = \frac{1}{2} (\log 2 + \log 3 + \log 5)$$

$$\frac{1}{2} (a + b + \log 10 - \log 2) = \frac{1}{2} (a + b + 1 - a) = \frac{1}{2} (b + 1)$$

۱۱- معادله لگاریتمی زیر را حل کنید. (۱)

$$\log_3^{(x-1)} + \log_3^{\left(\frac{x}{2}+1\right)} = 2$$

$$\log_3 (x-1) \left(\frac{x}{2}+1\right) = \log_3 9 \rightarrow \frac{x^2}{2} + x - \frac{x}{2} - 1 = 9 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = -5 \quad x = 2$$

۱۲- مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید. (۱)

$$\sin(210) + \tan\left(\frac{14\pi}{3}\right)$$

$$\sin(180 + 30) + \tan(4\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin 30 - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

۱۳- ثابت کنید  $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$  (۱)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

۱۴- اگر  $\alpha$  زاویه‌ای در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد و  $\sin\alpha = \frac{3}{5}$  و  $\beta$  زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد و  $\cos\beta = \frac{-12}{13}$

در این صورت حاصل  $\sin(\alpha - \beta)$  را به دست آورید. (۱.۵)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos\alpha = \frac{-4}{5}$$

$$\rightarrow \sin\beta = \frac{-5}{13}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha \rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} - \left(\frac{-5}{13}\right) \left(\frac{-4}{5}\right)$$

$$= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{-56}{65}$$

۱۵- حدهای زیر را حساب کنید.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1)^3}{x-1} = 2 \times 3 = 6$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{-1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۶- پیوستگی تابع زیر را در نقطه  $x = 2$  بررسی کنید. (۱.۲۵)

$f(x) = \begin{cases} 3 & x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \end{cases}$

$f(2) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$

تابع در  $x=2$  حد دارد ولی پیوسته نیست. زیرا:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq f(2)$

(صورتی با کسری)

نام و نام خانوادگی مصحح:

نام و نام خانوادگی تجدید نظر کننده:

نمره ورقه به عدد:

محل امضا

محل امضا

نمره ورقه به حروف: